Álgebra Superior II
Doctor Francisco Raggi
Tarea 1

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, demuestre que:

1. El neutro aditivo es único.
2. El inverso aditivo es único.
3. Si $a + c = b + c$ entonces $a = b$.
4. $-(-a) = a$
5. $(-a)b = -(ab)$
6. $(-a)(-b) = ab$
7. Si $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$.
8. $a^2 = 0 \iff a = 0$
9. Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.
10. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $bc < ac$
11. $a < 0 \iff -a > 0$
12. a es unidad si y solo si $-a$ es unidad.
13. Si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$
14. Si $0 < a, b$ y $a^2 < b^2$ entonces $a < b$
15. $\mathbb{Z}$ es el único subanillo de $\mathbb{Z}$
16. Dominio Entero sii la Ley de la Cancelación
17. El neutro multiplicativo es único
18. Si $a < b$ y $c > d$ entonces $a - c < b - d$
19. Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$

20. Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$ entonces $ac < bd$

21. Demuestre que son equivalentes:

    a) Principio de Inducción $\forall A \subseteq \mathbb{N}$
    1) $1 \in A$
    2) $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ entonces $A = \mathbb{N}$

    b) Principio de Inducción Generalizada $\forall A \subseteq \mathbb{N}$
    1) $1 \in A$
    2) $1, ..., n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ entonces $A = \mathbb{N}$

    Demuestre que usando el PI

22. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \neq 1, 1 + r + ... + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

23. $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$

24. $\forall n \in \mathbb{N}, 10^n$ deja residuo 1 después de ser dividido por 9

25. $\forall n \in \mathbb{N}, 1^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(+1)(2n+1)$

26. $\forall n \in \mathbb{N}, 1^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$

27. $\forall n \in \mathbb{N}, 1^4 + ... + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$

28. $\forall n \geq 10, 2^n \geq n^3$

29. $\forall n \geq 17, 2^n \geq n^4$

30. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall n \geq k^2 + 1, 2^n \geq n^k$

31. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall 1 + x > 0, (1+x)^n \geq 1 + nx$

32. $\forall n \in \mathbb{N} \exists ! k \in \mathbb{N}, n = 2^k s$ donde s es impar

    Sea $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci,

33. $\forall n \in \mathbb{N}, F_n < 2^n$

34. Doble inducción $\forall A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

    a) $(1,1) \in A$
    b) $(m,1) \in A \Rightarrow (m+1,1) \in A$
    c) $\forall m \in \mathbb{N}, (m,n) \in A \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, (m, n+1) \in A$ entonces $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

35. Usa doble inducción para demostrar que $\forall n, m \in \mathbb{N}, (m+1)^n > mn$