PRINCIPIOS DE INDUCCIÓN

MAT. FRANK P. MURPHY-HERNANDEZ

El principio de inducción es **la forma** de demostrar propiedades sobre los naturales, esto es debido a la construcción de los naturales. En general cuando se enuncie algún teorema sobre los naturales se demostrará usando inducción o en caso de que no, se demostrará usando resultados que ya fueron demostrados por inducción. La siguiente es la versión conjuntista del principio de inducción.

Principio de Inducción C. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

i) $0 \in A$.

ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Al punto i) se le llama la base de la inducción y al punto ii) el paso inductivo.La versión más común del principio de inducción es:

Principio de Inducción P. Sea p una propiedad, si:

i) $p(0)$ (0 cumple la propiedad).

ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $p(n)$ entonces $p(n+1)$(si n cumple la propiedad, entonces $n + 1$ cumple la propiedad).

Entonces para cada natural n, $p(n)$(Todos los naturales cumplen la propiedad).

Ejemplo 1. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=0}^{n} i = (n^2 + n)/2\}$, primero $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = (0^2 + 0)/2$ por lo que el paso base se cumple. Ahora se supondrá que $\sum_{i=0}^{n} i = (n^2 + n)/2$, a esto se le llama la hipótesis de inducción, y se suma $n + 1$ de ambos lados $\sum_{i=0}^{n+1} i = (\sum_{i=0}^{n} i) + (n + 1) = (n^2 + n)/2 + (n + 1) = ((n + 1)^2 + (n + 1))/2$. Por lo que si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$ y por el principio de inducción $A = \mathbb{N}$. Lo que dice que la formula $\sum_{i=0}^{n} i = (n^2 + n)/2$ se cumple para todo los naturales.

Nótese que éstos principios son equivalentes , si se empieza con el PIC para llegar al PIP solo se considera al conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n)\}$ y para el regreso se considera la propiedad $p(n) := n \in A$. Al PIC se le llamará PI a secas.

Ahora se enuncian otros principios de inducción y recuérdese que para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_n := \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} = \{0, 1, ..., n-1\}$.

Principio de Inducción Fuerte. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

i) $0 \in A$.

ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $I_n \subseteq A$ entonces $n \in A$.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Principio de Inducción Generalizado. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $I_n \subseteq A$ entonces $n \in A$.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Proposición 1. Los tres principios de inducción (PI,PIF,PIG) son equivalentes.

Antes de empezar la demostración note que los tres principios son implicaciones y todas con el mismo consecuente, asi que lo que se busca demostrar es una proposición de lo forma $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$. La hipótesis es $P \Rightarrow Q$ y lo que hay que demostrar es $R \Rightarrow Q$. La forma usual de hacer esta demostración es demostrar que $R \Rightarrow P$ y por transitividad se deducirá lo deseado. Esto es una forma curiosa de demostrar que una implicación implica otra implicación pues lo que se demuestra es que la hipótesis de segunda implicación implica la hipótesis de la primera implicación.

PI$\Rightarrow$PIF) Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

i) $0 \in A$.

ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $I_n \subseteq A$ entonces $n \in A$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \in A$ y se busca demostrar que $m + 1 \in A$, esto se hara demostrando que $I_{m+1} \subseteq A$ y aplicando ii) se tendrá que $m + 1 \in A$. Para esto defínase $A_m = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq m \Rightarrow I_{k+1} \subseteq A\}$. Ahora se aplicará el PI sobre A_m. Primero como $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m$ y por hipótesis $\{0\} \subseteq A$, entonces $0 \in A_m$. Ahora sea $k \in A_m$, hay dos casos.

Caso $m \leq k$) Si $m \leq k$ entonces $m < k + 1$. Por lo que el antecedente es falso y $k + 1 \in A_m$.

Caso $k < m$) Si $k < m$ entonces $k + 1 \leq m$ y $I_{k+1} \in A$. Pero por ii) $k + 1 \in A$, de lo que $I_{k+1} \cup \{k + 1\} \subseteq A$ pero $I_{k+1} \cup \{k + 1\} = I_{k+2}$. Por lo tanto $k + 1 \in A_m$.

Por el PI, $A_m = \mathbb{N}$. Lo que quiere decir que $I_{m+1} \subseteq A$ y por ii) $m + 1 \in A$. Por lo que A cumple i) y ii) de PI se tiene que $A = \mathbb{N}$.

PIF$\Rightarrow$PIG) Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, si $I_n \subseteq A$ entonces $n \in A$. Nótese que $I_0 = \emptyset$ y $I_0 \subseteq A$, entonces $0 \in A$. Entonces A cumple i) y ii) de PIF, entonces $A = \mathbb{N}$.

PIG$\Rightarrow$PI) Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

i) $0 \in A$.

ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $I_m \subseteq A$, y se quiere demostrar que $m \in A$.

Si $m = 0$ entonces $I_0 \subseteq A$ y por i) $0 \in A$.

Si $m \neq 0$ entonces $m = k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$, por lo que si $I_{k+1} \subseteq A$ y en particular se tiene que $k \in A$ por los que por ii) $m = k + 1 \in A$. Por el PIG se tiene que $A = \mathbb{N}$. ∎

Otro principio que es equivalente al pincipio de inducción es el principio del buen orden, que dice que el orden canónico de los naturales es un buen orden.

Principio del Buen Orden. Sea $B \subseteq \mathbb{N}$, si $B \neq \emptyset$ entonces existe $b \in B$ tal que para cada $x \in B$, $b \leq x$.

El PBO dice que todo subconjunto de los naturales no vacío tiene un elemento menor.

Proposición 2. El principio de inducción y el principio del buen orden son equivalentes.

$\Rightarrow$) Primero la ida, el principio de inducción implica el principio del buen orden, sea $B \subseteq \mathbb{N}$ con $B \neq \emptyset$, y se tiene que demostrar que B tiene un elemento mínimo, para hacer esto se supondrá que B no lo tiene y llegaremos a la contradicción de que B es vacío.

Se empieza suponiendo que B no tiene un mínimo y se sigue definiendo A como el conjunto de todos los naturales que son menores a todos los elementos de B, es decir, $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a < b, \quad \forall b \in B\}$ y se hace notar que si $a \in A$ entonces no se puede dar el caso de que $a \in B$, por que si pasase $a < a$, lo que es una contradicción, por lo cual se sigue que A es un subconjunto del complemento de B en los naturales, $A \subseteq (\mathbb{N} \setminus B)$.

Se pasa a demostrar que $A = \mathbb{N}$ por inducción, para la base se tiene que $0 \in A$, inmediatamente se observa que si $0 \in B$ entonces B tendra un mínimo contradiciendo lo supuesto, así que $0 \in \mathbb{N} \setminus B$, más aún $0 < b$ para toda $b \in B$, entonces $0 \in A$.

Para el paso inductivo, se supone que $n \in A$ y que $n+1 \notin A$, entonces negando la condición para pertencer a A se tiene que existe $b_0 \in B$ tal que $b_0 \leq n+1$, por hipótesis de inducción $n \in A$ que implica que $n < b_0$, por lo que se sigue que $n+1 \leq b_0$ y de aquí $b_0 = n+1$, nótese que esto implica que b es un mínimo de B, puesto que como $n < b$ para toda $b \in B$, entonces $n+1 \leq b$ para toda $b \in B$ y con el hecho de que $n+1 = b_0 \in B$, dice que b_0 es un mínimo, que contradice la suposición de que B no tenía elemento mínimo, por lo que $n+1 \in A$.

Por el principio de inducción $A = \mathbb{N}$, pero $A \subseteq \mathbb{N} \setminus B$ lo que implica que $\mathbb{N} = \mathbb{N} \setminus B$ y de aquí $B = \emptyset$ contraciendo el hecho de que fuese no vacío. Por lo cual B debe de tener un mínimo.

$\Leftarrow$)Ahora el regreso, el principio del buen implica el principio de inducción. Sean A un subconjunto de los naturales que cumple que $0 \in A$ y si $n \in A$ entonces $n+1 \in A$, y B el complemento de A en los naturales, si se logra de demostrar que B es vacío abremos terminado pues esto último implica que $A = \mathbb{N}$.

Si B fuese distinto del vacío, por el principio del buen orden se tendría que B tiene un elemento mínimo b_0, como b_0 es distinto de 0 tiene que ser sucesor de alguien, por lo que existe k natural tal que $b_0 = k+1$, pero k no puede ser elemento de B pues b_0 es mínimo, así que k es un elemento de A, pero por hipótesis esto implica que $k+1$ es un elemento de A, pero $k+1 = b_0$ y esto es una contadicción puesto que A y B no tienen elementos en común. Esto vino de suponer que B es no vacío, por lo tanto B es vacío como se deseaba.

Otra demostracin quizá más directa. Empezando con el PIG,

$\forall A \subseteq \mathbb{N}, (\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subseteq A \Rightarrow n \in A) \Rightarrow A = \mathbb{N}$

Usando la contrapuesta se tiene que lo anterior es equivalente a :

$\forall A \subseteq \mathbb{N}, \neg(A = \mathbb{N}) \Rightarrow \neg(\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subseteq A \Rightarrow n \in A)$

Negando las proposiciones, se tiene:

$\forall A \subseteq \mathbb{N}, (A \neq \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, I_n \subseteq A \wedge n \notin A)$

Observando que como $A \subseteq \mathbb{N}$, se tiene que $A \neq \mathbb{N}$ si y sólo si $\mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset$. Poniendo $B = \mathbb{N} \setminus A$ y sustituyendo. Se observa que $I_n \subseteq A$ si y sólo si $I_n \cap B = \emptyset$. Por lo que se tiene que :

$\forall B \subseteq \mathbb{N}, (B \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, I_n \cap B = \emptyset \wedge n \in B)$

Recordando I_n es el conjunto de los naturales menores que n, $I_n \cap B = \emptyset$ dice que no hay elementos menores que n en B y como $n \in B$, esto quiere decir que n es el menor elemento de B, por lo que se tiene que:

$\forall B \subseteq \mathbb{N}, (B \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists n \in B, \forall x \in B, b \leq x)$

Que es el PBO.■

Lo interesante de la ultima prueba es que demuestra que el PBO es solo la contrapuesta del PIG. Más interesante aún es que la ultima proposición dice que en todo conjunto bien ordenado se puede aplicar inducción.

Ahora se tienen varias versiones del principio de inducción y se usara indiscriminadamente cualquier versión sin previo aviso.

Es común tener teoremas sobre ciertos subconjuntos de los naturales como los pares, los primos, los naturales menores a k o lo mayores a k, en este caso también se puede usar inducción. La primera forma es para $X \subseteq \mathbb{N}$ distinto del vacío y $B \subseteq X$, se aplica el principio de inducción sobre el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \in X \Rightarrow n \in B\}$. Ésta forma es un poco complicada, lo que dice es que si en el conjunto X y se tiene un subconjunto B de X, entonces se puede aplicar el principio de inducción para demostrar que $B = X$, ésta forma de aplicar inducción tiene la ventaja de hacer facil de demostrar el caso base. Pero más faci de entender es el hecho de restringir la inducción vía restringir el buen orden.

Si B con la relación $\leq$ es un buen orden y se toma a C subconjunto de B, se le puede asignar la misma relación a C y ver que es un buen orden en C, ya que si X es un subconjunto de C distinto del vacío entonces X es un subconjunto de B distinto del vacío y como $\leq$ es un buen orden X tendrá un elemento menor, que es lo que se buscaba.

Por lo observado anteriormente y por la proposición 2 se tiene que se puede aplicar inducción en los subconjuntos de los naturales, solo que ciertas observaciones se tienen que hacer, primero en la parte ii) del PI dice que si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$, si se desease aplicar inducción en los pares el hecho de sumarle uno a un par lo hace un impar y deja de tener sentido, con $n+1$ se refiere al sucesor de n que en los naturales es $n+1$, pero en los pares $n+2$. Si $B \subseteq \mathbb{N}$ y $n \in B$, el sucesor de n en B, $s_B(n) = \min\{k \in B \mid k > n\}$, claro que $\{k \in B \mid k > n\}$ tiene que ser diferente para que hablar del mínimo tenga sentido. La segunda observación es que 0 no tiene por que estar en B, por ejemplo si quiero hacer inducción sobre los impares, así que en lugar de 0 en la primera se sustituye por $\min B$. Por lo que principio de inducción para subconjuntos de los naturales es:

Principio de Inducción S. Sea $B \subseteq \mathbb{N}$ con B distinto del vacío. Si $X \subseteq B$ tal que:

i) $\min B \in X$.

ii) Para cada $n \in B$, si $n \in X$ y $s_B(n)$ existe, entonces $s_B(n) \in X$.

Entonces $X = B$.

Una forma de garantizar que $s_B(n)$ siempre exista es pidiendo que B sea infinito.

Principio de Inducción I. Sea $B \subseteq \mathbb{N}$ con B infinito. Si $X \subseteq B$ tal que:

i) $\min B \in X$.

ii) Para cada $n \in B$, si $n \in X$, entonces $s_B(n) \in X$.

Entonces $X = B$.

Ejemplo 4 Sean $\mathbb{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los pares no negativos y $A = \{n \in \mathbb{P} \mid (-1)^n = 1\}$. Como $0 \in \mathbb{P}$ es el primer elemento par, y $(-1)^0 = 1$, por lo que $0 \in A$, por lo tanto se cumple el paso base. Ahora la hipótesis de inducción es que se cumple para $n \in A$, pero ese n es de la forma $2k$ con $k \in \mathbb{N}$ asi que el sucesor de n es $n+2$ que es el siguiente par, por lo que $(-1)^{n+2} = (-1)^n(-1)^2 = 1$. Por lo tanto $A = \mathbb{P}$.

Por último un ejemplo de cómo no usar inducción, éste ejemplo se le debe a Pólya, consideremos la siguiente afirmación, todos los caballos tienen el mismo color, para facilitar el entendimiento se considerara que hay tantos caballos como naturales, es decir, que C_n es el n-esimo caballo y que c_n es el color del n-ésimo caballo. Se demostrará que por inducción que para cualquier n natural, si se tienen n caballos entonces estos n caballos tienen el mismo color. Para el paso base $n = 0$, es claro que si no se tienen caballos, pues estos tienen el mismo color, para aclarar un poco más las cosas, se considera el caso $n = 1$, si solo se tiene un caballo pues también todos los caballos tienen el mismo color. Ahora supone valido para n, es decir, para cualquier conjunto con n caballos todos los caballos de éste conjunto tiene el mismo color. Suponemos que se tiene un conjunto con $n + 1$ caballos $\{C_1, ..., C_n, C_{n+1}\}$ entonces para el subconjunto $\{C_1, ..., C_n\}$ que consta de n caballos todos sus caballos tienen el mismo color por hipótesis de inducción, de manera análoga pasa igual para $\{C_2, ..., C_n, C_{n+1}\}$, pero C_2 esta en ambos conjuntos por los el color de los caballos del primer subconjunto es igual al color de los caballos del segundo subconjunto, de aquí se sigue que los $n + 1$ caballos tienen el mismo color. Por el principio de inducción todos los caballos tienen el mismo color.

¿Qué error tiene la prueba anterior ? Considere el paso inductivo cuando se aplica de 1 para 2 los subcojuntos son $\{C_1\}$ y $\{C_2\}$ que no tienen un caballos en común para aplicar la transitividad a los colores, como es natural hemos visto dos caballos de diferentes colores y es justo lo que hace fallar la prueba, que el argumento no funciona para 2.

Ejercicios. Demuestre por inducción que para $n \in \mathbb{N}$:

1. $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$
2. $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\sum_{i=0}^{n}(2i+1)^3 = (n+1)^2(2(n+1)^2-1)$
5. $\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
6. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$
7. $1+2n \leq 3^n$
8. Para $a, b \in \mathbb{R}$, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i})$
9. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) < f(n+1)$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \leq f(n)$.
10. Encuentre el mínimo $k \in \mathbb{N}$, tal que para todo natural $n \geq k$, $n^2 - 9n + 19 > 0$.
11. Para $n \geq 3$, $(1+\frac{1}{n})^n < n$.
12. Para $n \geq 6$, $7n < 2^n$.
13. Para $n \geq 4$, $3^n > n^3$.
14. $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$
15. Para $n \geq 2$, $\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{1}{i^2}) = \frac{n+1}{2n}$

La sucesión de Fibonacci $\{F_n\}_{i=1}^{\infty}$ se define recursivamente como $F_1 = 1 = F_2$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

16. $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
17. $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_{n+1}F_n$
18. Para $n \geq 2$, $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

19. Para $n \geq 5$, $F_n = 5F_{n-4} + 3F_{n-5}$.

20. A un cículo se le trazan n cuerdas de manera que cada cuerda intersecta a todas las otras pero nunca hay tres concurrentes. Demuestre que se divide al cículo en $\frac{n^2+n+2}{2}$. Piense que pasa en el caso de un plano y rectas en posición general.

21. $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$

22. Sean D el conjunto de la funciones derivables, usando que para $f, g \in D$ $(fg)' = f'g + fg'$. Demuestre que para $f_1, ..., f_n \in D$

$$\frac{(\prod_{i=1}^n f_i)'}{\prod_{i=1}^n f_i} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i'}{f_i}$$

23. Si $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, entonces para $n \geq 1$:

$$F_n = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\phi - \bar{\phi}}$$

24.Para $n \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

25. $\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i F_i = F_{2n-1} - 1$

26. Para $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1$

27. $n^2 + n$ es par.

28. $F_n < (\frac{5}{3})^{n+1}$