Álgebra Lineal 1
Mat. Frank Patrick Murphy Hernandez
Tarea Examen

Escriba por los dos lados de la hoja o en hojas reciclables.

1) Para cualesquiera dos matrices $A, B \in M_n(F)$, det(AB)=det(A)det(B).

2) Sea A una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$ invertible, entonces $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

Definición: Para $A \in M_n(F)$ y $\sigma \in S_n$. Se define la matriz A^σ como $(A^\sigma)_{ij} = A_{\sigma(i)j}$

3) Demostrar que para $\delta : M_n(F) \to F$ n-lineal en los renglones, son equivalentes:

i) δ es alternante.

ii) $\delta(A^{(ij)}) = -\delta(A)$

iii) $\delta(A^\sigma) = sgn(\sigma)\delta(A)$ para toda $\sigma \in S_n$

4) Demostrar que si $\delta : M_n(F) \to F$ n-lineal en los renglones y $1 + 1 \neq 0$ entonces son equivalentes:

i) δ es alternante.

ii) Para $A \in M_n(F)$ si $\exists\ i, j$ con $i \neq j$ tales que ${}^iA =^j A$ entonces $\delta(A) = 0$.

5) Obtenga por medio de la regla de Cramer la solución a los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$2x + y + z = 3 \tag{1}$$

$$x - y - z = 0 \tag{2}$$

$$x + 2y + z = 0 \tag{3}$$

ii)

$$4x - y + z = -5 \tag{4}$$

$$2x + 2y + 3z = 10 \tag{5}$$

$$5x - 2y + 6z = 1 \tag{6}$$

iii)

$$(1 + i)x + (2 - i)y = 2 + 7i \tag{7}$$

$$7x + (8 - 2i)y = 4 - 9i \tag{8}$$

Definición: Sea $A \in M_n(F)$. El Polinomio $p(t) = det(A - tI_n)$ es llamado el polinomio característico de A.

6)Sea A una matriz $A \in M_n(F)$ con polinomio característico $p(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0$. Demuestre que :

i) $a_0 = det(A)$

ii) $tr(A) = (-1)^{n-1}a_{n-1}$.

Definición: Sea T una transformación lineal en espacio vectorial V de dimensión finita. Definimos el determinante determinate de T, como $det(T) = det([T]_\beta)$, con β una base ordenada de V.

7)Demuestre que $det(T - \lambda I_v) = det([T]_\beta - \lambda I)$ para cualquier escalar λ y cualquier base ordenada β de V.

8)Demuestre que si $A \in M_n(F)$ tiene n valores propios distintos $\lambda_1, ..., \lambda_n$ y x_i es un vector propio de λ_i para $i = 1, ..., n$, entonces $\{x_i\}_{i=1}^n$es base.

9)Demuestre que si $A \in M_2(\mathbb{R})$ y A simétrica entonces A es diagonalizable.

10)Para cada una de las siguientes matrices $A \in M_{n\times n}(F)$ diga si son diagonalizables, si lo son encuentre D su matriz diagonal y la base de vectores propios.

i)

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

ii)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

iii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$